**专题三 导数与函数性质**

**一、复习目标：**

1、提炼利用导数研究函数的切线问题的策略；

2、提炼利用导数研究函数的哪些性质；

3、提炼利用导数研究函数的单调性、极值最值的基本策略.

**二、问题与策略**

**【问题一】**函数的切线的处理策略有哪些？

**【试题1】：**

1．曲线*y*＝2sin*x*+cos*x*在点（π，﹣1）处的切线方程为（　　）

A．*x*﹣*y*﹣π﹣1＝0 B．2*x*﹣*y*﹣2π﹣1＝0

C．2*x*+*y*﹣2π+1＝0 D．*x*+*y*﹣π+1＝0

解：由*y*＝2sin*x*+cos*x*，得*y*′＝2cos*x*﹣sin*x*，

∴*y*′|*x*＝π＝2cosπ﹣sinπ＝﹣2，

∴曲线*y*＝2sin*x*+cos*x*在点（π，﹣1）处的切线方程为*y*+1＝﹣2（*x*﹣π），

即2*x*+*y*﹣2π+1＝0．

故选：*C*．

2．已知曲线*y*＝*aex*+*xlnx*在点（1，*ae*）处的切线方程为*y*＝2*x*+*b*，则（　　）

A．*a*＝*e*，*b*＝﹣1 B．*a*＝*e*，*b*＝1 C．*a*＝*e*﹣1，*b*＝1 D．*a*＝*e*﹣1，*b*＝﹣1

解：*y*＝*aex*+*xlnx*的导数为*y*′＝*aex*+*lnx*+1，

由在点（1，*ae*）处的切线方程为*y*＝2*x*+*b*，

可得*ae*+1+0＝2，解得*a*＝*e*﹣1，

又切点为（1，1），可得1＝2+*b*，即*b*＝﹣1，

故选：*D*．

3．已知函数*f*（*x*）＝﹣*x*3+2*x*2﹣*x*，若过点*P*（1，*t*）可作曲线*y*＝*f*（*x*）的三条切线，则*t*的取值范围是（　　）

A．（0，） B．（0，） C．（0，） D．（0，）

解：*f*（*x*）＝﹣*x*3+2*x*2﹣*x*的导数为*f*′（*x*）＝﹣3*x*2+4*x*﹣1＝﹣（3*x*﹣1）（*x*﹣1），

设切点为*M*（*x*0，*y*0），

可得切线的斜率为*k*＝﹣3*x*02+4*x*0﹣1，

切线的方程为*y*﹣*y*0＝（﹣3*x*02+4*x*0﹣1）（*x*﹣*x*0），

即*y*﹣（﹣*x*03+2*x*02﹣*x*0）＝（﹣3*x*02+4*x*0﹣1）（*x*﹣*x*0），

代入（1，*t*），可得*t*﹣（﹣*x*03+2*x*02﹣*x*0）＝（﹣3*x*02+4*x*0﹣1）（1﹣*x*0），

化简整理可得2*x*03﹣5*x*02+4*x*0﹣1﹣*t*＝0，

过点*P*（1，*t*）可作曲线的三条切线，故此方程有三个不同解，下研究方程解有三个时参数*t*所满足的条件．

设*g*（*x*0）＝2*x*03﹣5*x*02+4*x*0﹣1﹣*t*，则*g*′（*x*0）＝6*x*02﹣10*x*0+4，

由*g*′（*x*0）＝0，得*x*0＝或*x*0＝1，

由*g*（*x*0）在（﹣∞，），（1，+∞）上单调递增，在（，1）上单调递减．

可得*g*（*x*0）的极大值点为，极小值点为1，

则关于*x*0方程2*x*03﹣5*x*02+4*x*0﹣1﹣*t*＝0有三个实根的充要条件是：

，解得0＜*t*＜，

故选：*D*．

【策略1】解决函数图像的切线问题关键在于抓住切点，用好转化思想，将问题转化为方程问题，如第1小题简单求导求切线斜率就可以，第2小题是知切线方程求参数（方程思想），第3小题为知某点处切线条数，求参数范围（转化为方程有三根的充要条件）.

**【试题2】:**

1．已知函数*f*（*x*）＝*lnx*﹣．设*x*0是*f*（*x*）的一个零点，证明曲线*y*＝*lnx*在点*A*（*x*0，*lnx*0）处的切线也是曲线*y*＝*ex*的切线．

【解答】因为*x*0是*f*（*x*）的一个零点，则有*lnx*0＝，

曲线*y*＝*lnx*，则有*y*′＝；

由直线的点斜式可得曲线的切线方程，

曲线*y*＝*lnx*在点*A*（*x*0，*lnx*0）处的切线方程为：*y*﹣*lnx*0＝（*x*﹣*x*0），

即：*y*＝*x*﹣1+*lnx*0，将*lnx*0＝代入，

即有：*y*＝*x*+，

而曲线*y*＝*ex*的切线中，在点（*ln*，）处的切线方程为：*y*﹣＝（*x*﹣*ln*）＝*x*+*lnx*0，将*lnx*0＝代入化简，即：*y*＝*x*+，

故曲线*y*＝*lnx*在点*A*（*x*0，*lnx*0）处的切线也是曲线*y*＝*ex*的切线．

故得证．

【训练】. 若存在过点的直线与曲线和都相切，则等于

【解析】设若存在过点的直线与曲线切于点，切线方程为，即，因为在切线上，所以解得：，即切点坐标为，

当切点为时，由与相切可得：



得：

同理，切点为时解得

【策略2】涉及到多个函数公切线的问题时，这条切线是连接多个曲线的桥梁，往往从常系数函数入手求切线，然后再考虑和其他函数的关系.，不得

【试题3】：已知函数，，判断和是否存在公切线，如果不存在，请说明理由，如果存在请指出公切线的条数.

【解析】假设存在公切线，与和分别切于点则公切线即

同时即

所以：消去一个变量问题转化为方程有几个根的问题

，所以在单调递增，

因为时

所以函数在有且仅有一个零点

因为时，时

所以函数在有且仅有一个零点

所以一共两个零点

所以存在公切线，一共两条.

【策略3】分别在两曲线上设点，求切线然后利用两直线重合列出方程组，转化为方程组解得问题.

**【问题2】函数单调性的研究有哪些策略**

试题1：已知函数f(x)＝x2－2aln x＋(a－2)x，当a＜0时，讨论函数f(x)的单调性．

[解]　函数的定义域为(0，＋∞)，f′(x)＝x－＋a－2＝.

①当－a＝2，即a＝－2时，f′(x)＝≥0，f(x)在(0，＋∞)内单调递增．

②当0＜－a＜2，即－2＜a＜0时，∵0＜x＜－a或x＞2时，f′(x)＞0；－a＜x＜2时，f′(x)＜0，

∴f(x)在(0，－a)，(2，＋∞)内单调递增，在(－a,2)内单调递减．

③当－a＞2，即a＜－2时，

∵0＜x＜2或x＞－a时，f′(x)＞0；2＜x＜－a时，f′(x)＜0，

∴f(x)在(0,2)，(－a，＋∞)内单调递增，在(2，－a)内单调递减．

综上所述，当a＝－2时，f(x)在(0，＋∞)内单调递增；当－2＜a＜0时，f(x)在(0，－a)，(2，＋∞)内单调递增，在(－a,2)内单调递减；当a＜－2时，f(x)在(0,2)，(－a，＋∞)内单调递增，在(2，－a)内单调递减．

【**策略1**】研究含参数函数的单调性时，需注意依据参数取值对不等式解集的影响进行分类讨论.主要分以下四个方面,①二次项系数讨论，②根的有无讨论，③根的大小讨论，④根在不在定义域内讨论.

【试题2】：

1.设函数f′(x)是奇函数f(x)(x∈R)的导函数，f(－1)＝0，当x>0时，xf′(x)－f(x)<0，则使得f(x)>0成立的x的取值范围是(　　)

A．(－∞，－1)∪(0,1)

B．(－1,0)∪(1，＋∞)

C．(－∞，－1)∪(－1,0)

D．(0,1)∪(1，＋∞)

【答案】A

2.已知f′(x)是函数f(x)的导函数，f(1)＝e，∀x∈R,2f(x)－f′(x)＞0，则不等式f(x)＜e2x－1的解集为(　　)

A．(－∞，1) B．(1，＋∞)

C．(－∞，e) D．(e，＋∞)

【答案】B

【策略2】构造新函数策略：主要看要解的不等式所对应的函数单调性研究需要怎样的导数不等式，通过化简变形等方式寻找突破口.如第1小题中直接可以看出可以构造，而第2小题由2f(x)－f′(x)＞0我们要思考系数2是怎么来的，要么是求导产生的，要么是的复合函数产生，而且我们能够看出是商的导数，此时发现目标中指数上出现，故想到将不等式变形为

【试题3】：

1.若函数f(x)＝x－sin 2x＋asin x在(－∞，＋∞)单调递增，则a的取值范围是(　　)

A．[－1,1] B.

C. D.

【答案】C

2.已知函数f(x)＝x2－2aln x＋(a－2)x.

①当a＝－1时，求函数f(x)的单调区间；

②是否存在实数a，使函数g(x)＝f(x)－ax在(0，＋∞)上单调递增？若存在，求出a的取值范围；若不存在，说明理由．

解：①当a＝－1时，f(x)＝x2＋2ln x－3x，

则f′(x)＝x＋－3＝＝.

当0＜x＜1或x＞2时，f′(x)＞0，f(x)单调递增；当1＜x＜2时，f′(x)＜0，f(x)单调递减．

∴f(x)的单调增区间为(0,1)与(2，＋∞)，单调减区间为(1,2)．

②假设存在实数a，使g(x)＝f(x)－ax在(0，＋∞)上是增函数，

∴g′(x)＝f′(x)－a＝x－－2≥0恒成立．

即≥0在x∈(0，＋∞)上恒成立．

∴x2－2x－2a≥0当x＞0时恒成立，

∴a≤(x2－2x)＝(x－1)2－恒成立．

又φ(x)＝(x－1)2－，x∈(0，＋∞)的最小值为－.

∴当a≤－时，g′(x)≥0恒成立．

又当a＝－，g′(x)＝当且仅当x＝1时，g′(x)＝0.

故当a∈时，g(x)＝f(x)－ax在(0，＋∞)上单调递增．

**【问题3】函数最值的研究有哪些策略**

1.已知函数*f*(*x*)＝ln *x*＋*a*(1－*x*)．

(1)讨论*f*(*x*)的单调性；

(2)当*f*(*x*)有最大值，且最大值大于2*a*－2时，求*a*的取值范围．

解　(1)*f*′(*x*)＝－*a*(*x*＞0)．

若*a*≤0，则*f*′(*x*)＞0，

∴函数*f*(*x*)在(0，＋∞)上单调递增．

若*a*＞0，则当*x*∈时，*f*′(*x*)＞0，

当*x*∈时，*f*′(*x*)＜0，

所以*f*(*x*)在上单调递增，在单调递减．

(2)由(1)知，当*a*≤0时，*f*(*x*)在(0，＋∞)无最大值．

当*a*＞0时，*f*(*x*)在*x*＝取得最大值，

最大值为*f*＝ln ＋*a*＝－ln *a*＋*a*－1.

因此*f*＞2*a*－2等价于ln *a*＋*a*－1＜0.

令*g*(*a*)＝ln *a*＋*a*－1，则*g*(*a*)在(0，＋∞)上单调递增，*g*(1)＝0.于是，当0＜*a*＜1时，*g*(*a*)＜0；当*a*＞1时，*g*(*a*)＞0，因此，*a*的取值范围是(0，1)．

【策略】抓住函数最值位置出现在极值点或端点处的本质，把问题转化为求极值和端点值然后比较大小的问题.

**课后练习**

**一、选择题**

1.函数f(x)＝ln x－ax在x＝2处的切线与直线ax－y－1＝0平行，则实数a＝(　　)

A.－1 B. C. D.1

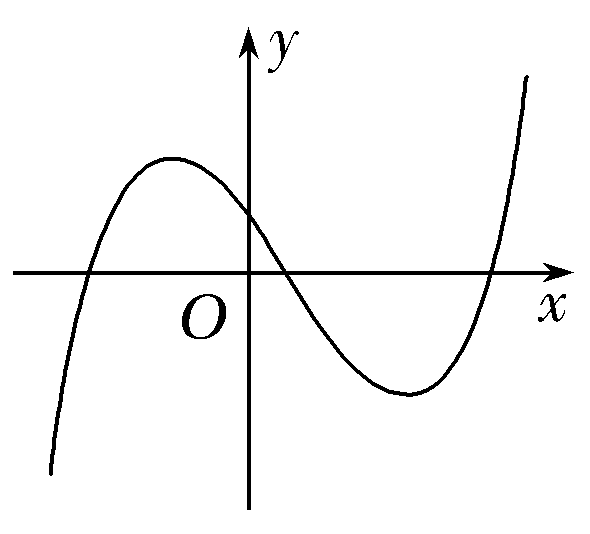
解析　由f(x)＝ln x－ax，得f′(x)＝－a，

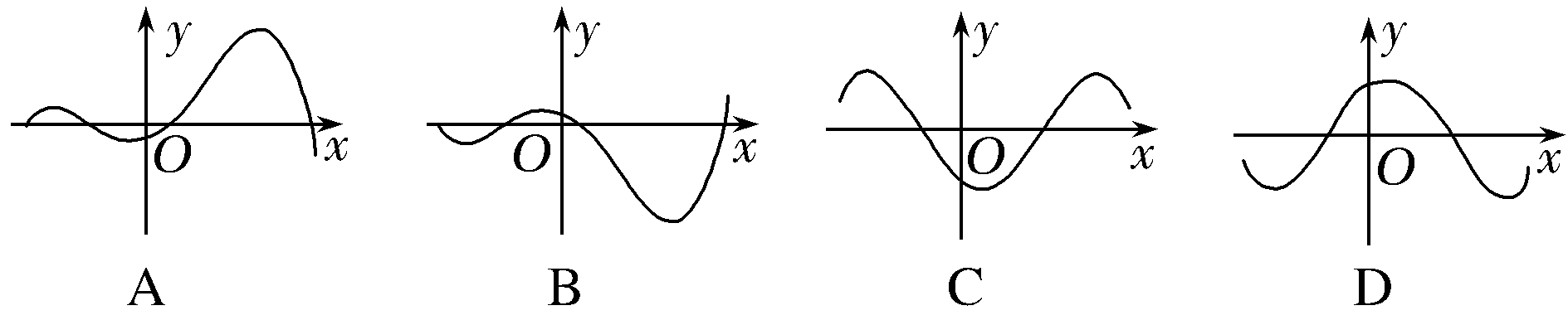
∴f(x)在x＝2处切线的斜率k＝f′(2)＝－a.

依题意－a＝a，所以a＝.

答案　B

2.函数y＝f(x)的导函数y＝f′(x)的图象如图所示，则函数y＝f(x)的图象可能是(　　)





解析　利用导数与函数的单调性进行验证.f′(x)＞0的解集对应y＝f(x)的增区间，f′(x)＜0的解集对应y＝f(x)的减区间，验证只有D选项符合.

答案　D

3.已知函数f(x)＝2ef′(e)ln x－，则f(x)的极大值点为(　　)

A. B.1 C.e D.2e

解析　因为f(x)＝2ef′(e)ln x－(x＞0)，

所以f′(x)＝－，所以f′(e)＝－＝2f′(e)－，

因此f′(e)＝，所以f′(x)＝－，

由f′(x)＞0，得0＜x＜2e；

由f′(x)＜0，得x＞2e.

所以函数f(x)在(0，2e)上单调递增，在(2e，＋∞)上单调递减，

因此f(x)的极大值点为x＝2e.

答案　D

4.(2020·合肥模拟)已知函数f(x)＝x3＋mx2＋nx＋2，其导函数f′(x)为偶函数，f(1)＝－，则函数g(x)＝f′(x)ex在区间[0，2]上的最小值为(　　)

A.－3e B.－2e C.e D.2e

解析　由题意可得f′(x)＝x2＋2mx＋n，

∵f′(x)为偶函数，∴m＝0，

故f(x)＝x3＋nx＋2，∵f(1)＝＋n＋2＝－，

∴n＝－3.

∴f(x)＝x3－3x＋2，则f′(x)＝x2－3.

故g(x)＝ex(x2－3)，

则g′(x)＝ex(x2－3＋2x)＝ex(x－1)(x＋3)，

据此可知函数g(x)在区间[0，1)上单调递减，在区间(1，2]上单调递增，

故函数g(x)的极小值，即最小值为g(1)＝e1·(12－3)＝－2e.

答案　B

5.(多选题)已知定义在上的函数f(x)的导函数为f′(x)，且f(0)＝0，f′(x)cos x＋f(x)sin x<0，则下列判断中正确的是(　　)

A.f<f B.f>0 C.f>f D.f>f

解析　令g(x)＝，x∈，

则g′(x)＝.

因为f′(x)cos x＋f(x)sin x<0，所以g′(x)＝<0在上恒成立，所以函数g(x)＝在上单调递减，所以g>g，即>，即f>f，故A错误；又f(0)＝0，所以g(0)＝＝0，所以g(x)＝≤0在上恒成立，因为ln ∈，所以f<0，故B错误；又g>g，所以>，即f>f，故C正确；又g>g，所以>，即f>f，故D正确.故选CD.

答案　CD

**二、填空题**

6.(2020·西安质检)若曲线y＝ex在x＝0处的切线也是曲线y＝ln x＋b的切线，则b＝\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析　令y＝f(x)＝ex，y＝g(x)＝ln x＋b，

∴f′(x)＝ex，∴f′(0)＝1，

∵f(0)＝1，∴曲线y＝ex在x＝0处的切线方程为y＝x＋1.

设切线y＝x＋1与曲线y＝g(x)＝ln x＋b的切点坐标为(m，m＋1)，

∵g′(x)＝，∴g′(m)＝＝1，∴m＝1，

∴切点坐标为(1，2)，∴2＝ln 1＋b，∴b＝2.

答案　2

7.已知定义在R上的可导函数f(x)的导函数为f′(x)，满足f′(x)<f(x)，且f(0)＝，则不等式

f(x)－ex<0的解集为\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析　构造函数g(x)＝，

则g′(x)＝，

因为f′(x)<f(x)，所以g′(x)<0，

故函数g(x)在R上为减函数，

又f(0)＝，所以g(0)＝＝，

则不等式f(x)－ex<0可化为<，

即g(x)<＝g(0)，

所以x>0，即所求不等式的解集为(0，＋∞).

答案　(0，＋∞)

8.若函数f(x)与g(x)满足：存在实数t，使得f(t)＝g′(t)，则称函数g(x)为f(x)的“友导”函数.已知函数g(x)＝kx2－x＋3为函数f(x)＝x2ln x＋x的“友导”函数，则k的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_.

解析　由g(x)＝kx2－x＋3可得g′(x)＝kx－1，

∵函数g(x)＝kx2－x＋3为函数f(x)＝x2ln x＋x的“友导”函数，

∴kx－1＝x2ln x＋x有解，即k＝xln x＋1＋(x＞0)有解.

令h(x)＝xln x＋1＋，则h′(x)＝1＋ln x－，

再令φ(x)＝1＋ln x－，∴φ′(x)＝＋＞0.

∴φ(x)在区间(0，＋∞)上单调递增.

∵h′(1)＝φ(1)＝0，∴x＞1时，h′(x)＞0；0＜x＜1时，h′(x)＜0，

∴h(x)在(0，1)上单调递减，在(1，＋∞)上单调递增，

∴h(x)≥h(1)＝2，∴k≥2.

答案　[2，＋∞)

三、解答题

9.已知函数f(x)＝(x－1)ln x－x－1.

证明：(1)f(x)存在唯一的极值点；

(2)f(x)＝0有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

证明　(1)f(x)的定义域为(0，＋∞).

f′(x)＝＋ln x－1＝ln x－.

因为y＝ln x在(0，＋∞)上单调递增，y＝在(0，＋∞)上单调递减，

所以f′(x)在(0，＋∞)上单调递增.

又f′(1)＝－1<0，f′(2)＝ln 2－＝>0，

故存在唯一x0∈(1，2)，使得f′(x0)＝0.

又当x<x0时，f′(x)<0，f(x)单调递减，

当x>x0时，f′(x)>0，f(x)单调递增，

因此，f(x)存在唯一的极值点.

(2)由(1)知f(x0)<f(1)＝－2，又f(e2)＝e2－3>0，

所以f(x)＝0在(x0，＋∞)内存在唯一根x＝α.

由α>x0>1得<1<x0.

又f＝ln－－1＝＝0，

故是f(x)＝0在(0，x0)的唯一根.

综上，f(x)＝0有且仅有两个实根，且两个实根互为倒数.

10.已知函数f(x)＝ax－1－ln x(a∈R).

(1)讨论函数f(x)在定义域内的极值点的个数；

(2)若函数f(x)在x＝1处取得极值，∀x∈(0，＋∞)，f(x)≥bx－2恒成立，求实数b的最大值.

解　(1)f(x)的定义域为(0，＋∞)，f′(x)＝a－＝.

当a≤0时，f′(x)<0在(0，＋∞)上恒成立，函数f(x)在(0，＋∞)上单调递减.

∴f(x)在(0，＋∞)上没有极值点.

当a>0时，由f′(x)<0，得0<x<；由f′(x)>0，得x>，

∴f(x)在上单调递减，在上单调递增，故f(x)在x＝处有极小值.

综上，当a≤0时，f(x)在(0，＋∞)上没有极值点；

当a>0时，f(x)在(0，＋∞)上有一个极值点.

(2)∵函数f(x)在x＝1处取得极值，

∴f′(1)＝a－1＝0，则a＝1，从而f(x)＝x－1－ln x.

因此f(x)≥bx－2⇒1＋－≥b，

令g(x)＝1＋－，则g′(x)＝，

令g′(x)＝0，得x＝e2，

则g(x)在(0，e2)上单调递减，在(e2，＋∞)上单调递增，

∴g(x)min＝g(e2)＝1－，即b≤1－.

故实数b的最大值是1－.